



TITLE:

楽器の非線形振動：木管楽器について(特別寄稿)

AUTHOR(S):

井戸川, 徹

CITATION:

井戸川, 徹. 楽器の非線形振動：木管楽器について(特別寄稿). 物性研究
1990, 55(2): 154-176

ISSUE DATE:

1990-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/94366>

RIGHT:

特別寄稿

楽器の非線形振動 *

— 木管楽器について —

筑波大 物工 井戸川 徹

(1990年9月14日受理)

1. はじめに

オーケストラにはさまざまな楽器が用いられる。バイオリンその他の弦楽器、トロンボーン等の金管楽器、フルートやオーボエのような木管楽器、多くの打楽器、等、と多彩である。ピアノやハープがこれに加わることもある。これらの楽器は物理学とは殆ど無縁な経験の積み重ねによって出来上がって来た。

ところでバイオリンは何故あのような形を持つのか、その一つ一つの部分は楽器全体に対してどのような役割を持つのか、弦にしても胴にしてもそれに用いるより適切な材料はないのか。演奏により適した構造のバイオリンは作れないのか。他の楽器についても同様にいろいろと考えたくなる。物理学を駆使したらもっとすばらしい楽器を作れないのか。プロの演奏家による音楽を聴くのもよいが、合奏メンバーの一員として音楽に参加するとき、素人は素人なりに、音楽の最高の楽しみを味わうらしい。楽器の研究には人間の感覚や熟練を無視することはできない。前世紀頃から現在に至るまで、多くの物理学者が楽器の研究に挑んできたが、多くの未解決の問題が残されている。音楽や楽器の中に新しい物理学が潜んでいるかも知れない。

全く偶然の機会から、筆者は楽器の研究を始めたが、現在の研究対象は、クラリネット、オーボエ、バスーン、サキソフオン等のリードを持つ木管楽器である。これらの楽器の発音機構は物理学的に見てほぼ同じである。本報告は、これらの楽器の共鳴気柱の性質や楽器全体の振舞の理解を目的として、多くの学生諸君と共に行ってきた、そして現在も進行中の、実験や測定について述べる。細部に立ち入ることなく、筋道をお伝えしたい。

2節では、木管楽器の構造と発音機構について、おおよそを述べる。特にリードの振舞や、リードと共鳴気柱がどのように結合し作用し合うかの概略を述べる。3節は、木管楽器の管体の中の共鳴気柱について記す。まず共鳴気柱の音響学的性質の記述法を紹介し、つぎに具体的な共鳴気柱の性質を計算あるいは測定した結果の例を示す。4節には、クラリネットの発振を記述する Schumacher の微分方程式を紹介し、その解を数値計算した結果を、実験結果と比較

* 本稿は編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた解説記事である。

し易い形の図として示す。5節は木管楽器を人工吹鳴した実験結果を示す。木管楽器の振舞は、吹鳴条件によって極めて複雑に変化し、典型的な非線形振動の例と思われる。

この報告を通じて使用する記号を以下にまとめて定義し、また図1の中に記しておく。この図は木管楽器が吹奏されている状態を示している。

$P(t)$ = 吹奏者の口の中の空

気圧力(その平均値
を P_0 とする)、

$p(t)$ = マウスピースあるいは

ダブルリード内の
圧力(音圧)、

$f(t)$ = 口の中からリードを

通して気柱に流れ込
む空気の体積流量、

$y(t)$ = 静止状態からのリー

ドの変位(リードが
開く方向を正にとる)、

$\xi(t)$ = リードとマウスピースの間の隙間、あるいはダブルリードの開口。

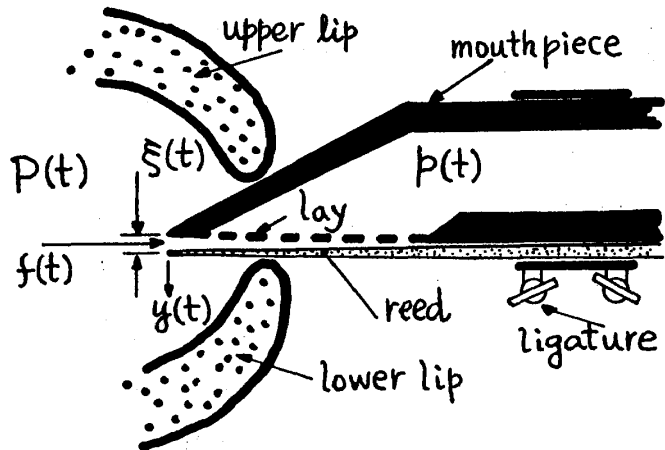


図1 吹奏される木管楽器のマウスピース部分

2. 木管楽器の構造と振舞いの概要

木管楽器は、共鳴気柱を形成する管体と、それに空気流を供給するためのリードから成る。木管楽器の基本的な構造を図2¹に示した。

管楽器の管体の中にある共鳴気柱は、基本的には円筒あるいは円錐形に限られ²、管体の端の部分ではベルによって滑らかに広がって大気に接している。例えばクラリネットの気柱は、基本的には円筒形であり、管端の部分では滑らかに大きく広がっている。オーボエ、バスーンおよびサキソフオンにおいては、気柱は円錐形であり、管端の部分では僅かに広がっている。

リードは、葦の茎を薄く削った振動片であるが、プラスチック製のものもある。クラリネットやサキソフオンではシングルリードすなわち1枚の振動片のリードが用いられる。このシングルリードは、図1に示すように、ligature と呼ばれる金属のバンドでマウスピースに取り付けられるが、静止時にはリードとマウスピースの間に隙間 ξ を残している。

オーボエやバスーンにはダブルリードが用いられる。図3に示したのはバスーン用のダブルリードの一例である。ダブルリードは2枚の振動片から成り、正面から見ると2つの円弧が向

き合っているように見える。ダブルリードは木管楽器の管体に差し込み、それを口にくわえて吹奏する。

満足すべきよい吹奏音は、熟練の結果、よいアンブシュアとタンギングから生まれる。アンブシュアとは、唇がリードをくわえる深さや唇とリード間の圧力の調節を言う。またタンギングとは音を発生させる瞬間に舌を使う演奏技法を言う。楽器が発生する音の基本周波数は、基本的には気柱の長さすなわち管体の長さあるいは音孔の開閉状態さらにはアンブシュアと吹鳴圧力 P_0 によって定まる。シングルリード楽器でもダブルリード楽器でも事情は同じである。

楽器が演奏され発音状態にあれば、気柱は振動し、 p は周期的に変化している。このとき f は、差圧 $P - p$ および ξ によって定まる。 P を一定と考えたときの p と f の関係を図4³に示す。 p が P_0 よりもかなり低いときには、リードはマウスピースに密着し、 $\xi = 0$ であるから、 $f = 0$ である。 p が次第に増加すると、リードの弾性復元力により、 $\xi > 0$ となり、 $f > 0$ となる。 p の増加とともに、 ξ も増加し f も増加する。さらに p が増して P_0 に近づくとき、 $P_0 - p$ が減少するので、 f は減少する。 p が減少するときにはこの逆の経過をたどる。 $p > P_0$ になるとすると、 $f < 0$ となる可能性もある。

木管楽器は、リードと共鳴気柱が結合した自励発振系である。この系はおおよそ図5のように考えることができる。振動のエネルギーは口から気柱に流れ込む空気流によって供給され、エネルギーの一部が管端あるいは開いた音孔から音として楽器の外へ放出される。発振状態における、 P 、 p 、 f および ξ の間の関係をまとめると以下のようになる。

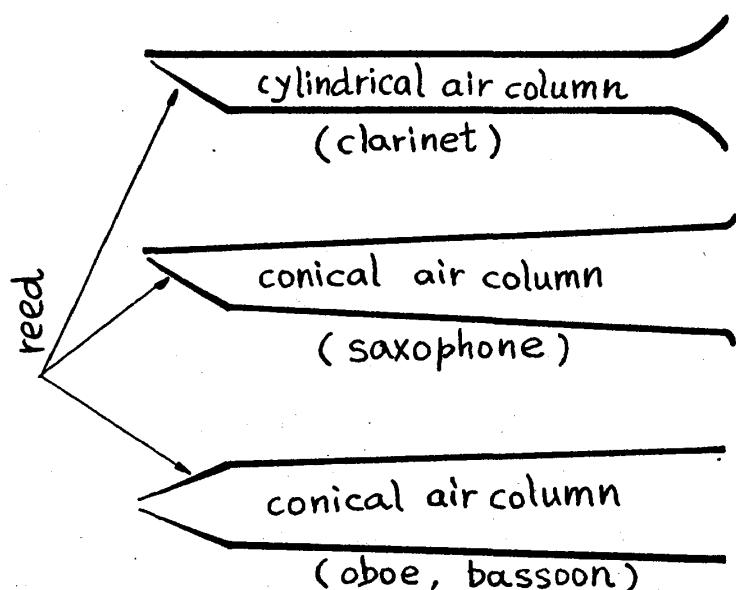


図2 木管楽器の基本的構成

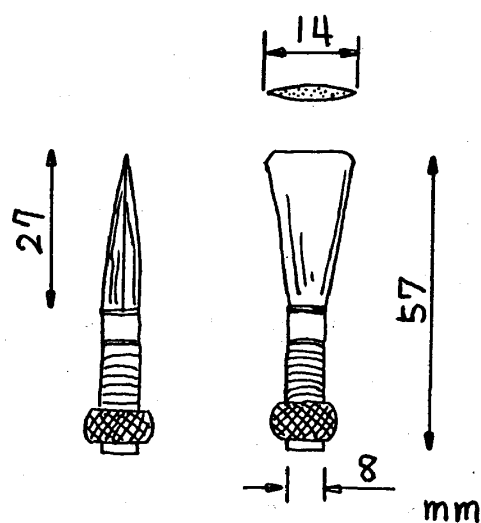


図3 バスーンリードの一例

(1) f は ξ と圧力差 $P - p$ によって定まる。 f と p の関係は、おおよそ図4のようになっている。(2) f が増加すると、リードのすぐ下流、すなわち気柱入口における p が増加し、この圧力波は気柱の中を管尻に向かって進み、管体の開けられた音孔や管端で反射し、再びリードに戻ってくる。(3) P が一定のとき、リードの内面にかかる p が高くなると ξ は大となり、 p が低くなると ξ は減少する。(4) ξ と p は同じ周期で周期的に変化し、その基本周波数は楽器が発生する音のそれに等しい。(5) p が高い状態で空気が供給されるから振動は持続する。

管体気柱の形状は入力 f によってどのような出力 p が発生するかを定める。気柱の性質は線形系として扱われ、音響インピーダンスによって表される。同じ楽器でも気柱形状の設計の詳細は各メーカーによって異なり、また同じメーカーの同じ形式の楽器ですらも出来上りは微妙に異なる。管体は木製あるいは金属製であり、その材質が楽器の音色に大きく影響することは経験的によく知られた事実である。しかし何故どのように材質が音色に影響するかは殆

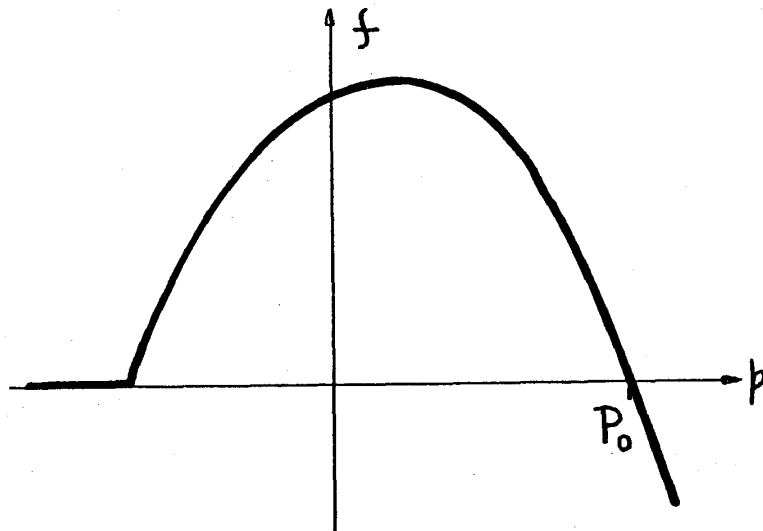


図4 空気の体積流量 f とマウスピース内音圧 p の関係

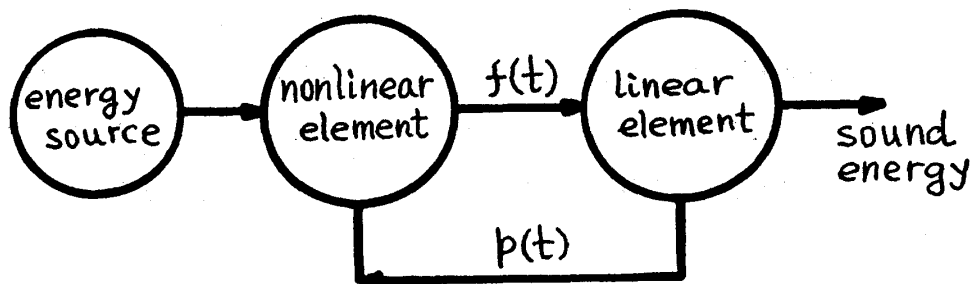


図5 自励振動系としての木管楽器

ど知られていない。演奏者が楽器を購入するときには、通常幾本かの楽器を試奏して好みに合った楽器を選び出す。リードの音響学的性質は、入力 p と出力 f の非線形な関係によって表される。個々のリードの性質は異なっているので、演奏者はリードを選びまたそれを削って自分に合ったように仕上げる。ダブルリードとシングルリードではその性質は異なる。またシングルリードの場合、リードが当たるマウスピースの面（図1においては lay と記してある）が、どのようなカーブに仕上げられているかも重要である。このカーブについては、楽器メーカーは2～3種類を用意しており、演奏者は自分の好みに合ったものを選ぶ。各種のリード木管楽器は、リード、管体気柱形状およびその組合せに差があるので、それぞれに異なる特徴を持つことは言うまでもない。演奏者の好みはさておいても、個々の木管楽器の性質を正確に表現し、あるいは最良の楽器を設計することは、それ程容易ではなさそうである。

3. 共鳴気柱の性質

木管楽器の管体気柱の音響学的性質は、それをリードの側からみたときの、音響インピーダンス $Z(\omega)$ 、あるいはインパルス応答 $g(t)$ によって表現できる。両者は互いに他の Fourier 変換の関係にある。さらに、後に導入する反射関数 $r(t)$ は $g(t)$ よりも速やかに零になるから、例えば後に示すクラリネットの振動波形の計算等に便利である。

3. 1 円柱気柱

もっとも簡単な一様な円柱気柱を一端から見たときの音響学的性質の説明から始める。図6に示すように、硬い面を持つピストンを点線の状態から急激に右に押し、長さ L の円筒管内にインパルス状の体積流量 $f(t) = \delta(t)$ を加える。このときこの円筒管の左端での圧力変化 $p(t)$ は図6に示すようになる。まず $f(t) = \delta(t)$ によりインパルス状の圧力が発生し、これは音速 c で右方向に伝わり、右端（開端）で正負反転して反射して再び左端に帰って来るが、管内を伝搬するときおよび管の右端で周波数に依存するエネルギー損失を伴うので、 $2L/c$ 時間後の $p(t)$ 波は幅が広がりまた背が低くなっている。この波は硬いピストンの面でそのまま反射し、向きを変えて右端に向かう。その後は同様なプロセスを無限に繰り返す。この場合の $p(t)$ はインパルス応答 $g(t)$ に他ならない。 $g(t)$ の Fourier 変換をこの円柱気柱を入力端（左端）から見た音響インピーダンスと呼び、

$$Z(\omega) = F\{g(t)\} \quad (1)$$

で表す。音響インピーダンスはまた

$$Z(\omega) = F\{p(t)\} / F\{f(t)\} \quad (2)$$

として与えられる。円柱気柱の断面積を S として、体積流量 f の代わりに流れの速さ $v = f/S$ を用いて

$$z(\omega) = F\{p(t)\} / F\{v(t)\} \quad (3)$$

を定義するとき、これを比音響インピーダンスと呼ぶ。

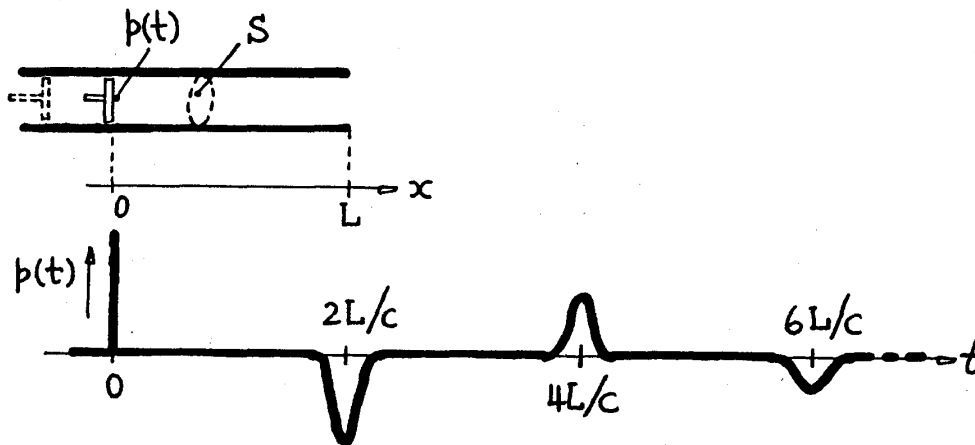


図6 円柱気柱のインパルス応答

ところで、円柱気柱についての音響学的情報は図6に示した $t = 2L/c$ 付近に現れる反射波にすべて含まれていて、それ以降の反射波は単にそれまでの繰り返しに過ぎないから何の役にも立たない。反射関数 $r(t)$ は、図7に示すように、この無駄を省いてくれる。 $r(t)$ を見ると $t = 0$ にインパルスが現れていない。また反射波の谷の深さは、 $g(t)$ の第1回目の反射波に比較して、半分にになっている。反射関数を得るには

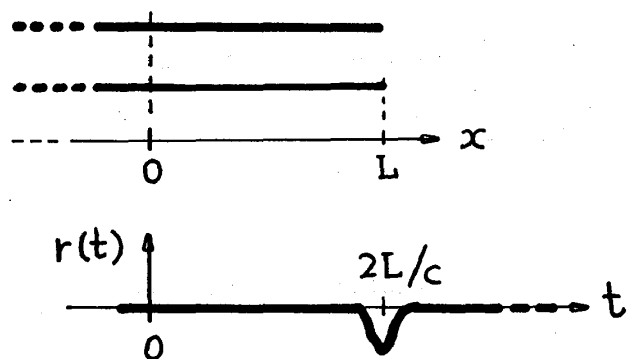


図7 円柱気柱の反射関数

$$r(t) = F^{-1} \{ (z(\omega) - z_0) / (z(\omega) + z_0) \} \quad (4)$$

を計算すればよいことが知られている⁴。ここに $z_0 (= \rho c)$ は特性インピーダンスと呼ばれ、 ρ は空気の密度である。具体的に考えると $r(t)$ は、長さ L の円筒管の左側に無限に長い一様な円筒を接続した状態での、 $x=0$ における $p(t)$ ($t>0$) を与えると考えられる。このとき管の右端からの第1回目の反射波は $x=0$ で反射することなく左に向かって進み2度と帰ってくることはない。

音響系を扱うときには電気回路のアナロジーが用いられることが多い。上記では、インパルス応答から音響インピーダンスを導出したが、通常は、円筒気柱の左端から見た音響インピーダンスを求め、その逆 Fourier 変換としてインパルス応答を定義する。しかしインパルス応答や反射関数が直感的に理解しやすいのに比較して、音響インピーダンス特にその位相曲線を読みこなすのは至難に近い。円柱気柱は図8(a)に示すような一様な伝送線路として考える。音圧を電圧に、空気の体積速度を電流に対応させると、円柱気柱と線路のインピーダンスは同じ形の微分方程式から出発して計算できる。円筒気柱や円錐気柱のみならず、管楽器の共鳴気柱のインピーダンスの計算法は、Plitnikら⁵ ならびにCausséら⁶ の論文に詳しく述べられている。線路の入力インピーダンスを計算するとき、線路の負荷インピーダンスが必要になる。線路の負荷インピーダンスは、音響系では、放射インピーダンスと呼ばれるものに対応する。その実数部は円筒管の右端から放射されて失われる音響エネルギーを表し、虚数部は開口端補正を表す。放射インピーダンスの計算法は Levinら⁷ の論文に記されている。

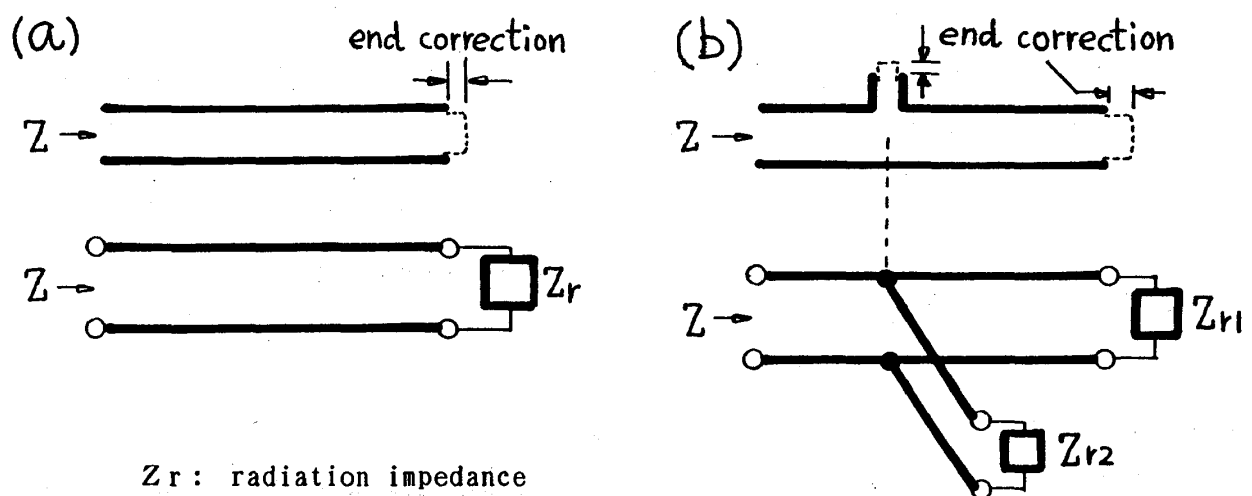


図8 電気回路アナロジー。(a) 円柱気柱。(b) 音孔を持つ円柱気柱。

円筒管に音孔のある場合には、図8(b)に示すように音孔のある位置に分岐線路を並列に接続し、その端に放射インピーダンスを接続し、全体のインピーダンスを計算すればよい。

3. 2 共鳴気柱の応答の計算および測定例

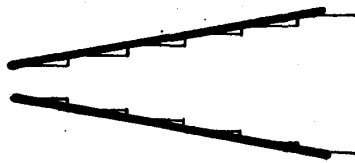
(1) 円錐気柱

円錐気柱や径が変化する気柱は、図9(a)に示すように、径の異なる短い円筒気柱を次々に接続して近似する。また例えばクラリネットの管端にあるベルの部分の気柱もこのようにして近似できる。図9は、ある円錐気柱のインパルス応答 $g(t)$ の測定および計算結果である⁸。測定法は文献9に詳細に述べてある。この円錐気柱は、実はバスーンの共鳴気柱を模して作ったもので、長さ2520mm、入口で4mm、出口で40mmの直径を持つ。バスーンのリードを用いてこれを吹奏すると基本周波数が58～59Hzの音を発生する。図9(b)は、入力音響インピーダンスの測定結果を逆Fourier変換して得たインパルス応答である。図9(c)はその $t = 0 \sim 17.5$ ms の部分を拡大したものである。図9(d)は入力音響インピーダンスの計算結果を逆Fourier変換して得たインパルス応答の $t = 0 \sim 17.5$ ms の区間を示している。計算および測定結果は極めてよい一致を示しているから、共鳴気柱の応答を知りたいときには、計算あるいは測定何れか便利な方法によればよいことが知られる。

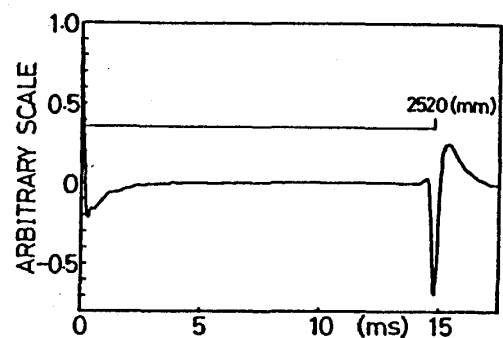
図9に示した円錐気柱のインパルス応答 $g(t)$ において、 $t = 0$ 付近の鋭いピークは体積流量の入力インパルスに伴う音圧であり、 $t = 15$ ms 付近の谷は円錐管の端からの反射波である。これらの特徴は円柱気柱の $g(t)$ にも見られるが、次の2点で円柱気柱の場合とは大きく異なる。(1) 初期インパルスのすぐ後に谷があり徐々に回復する。(2) $t = 15$ ms 付近の鋭い負圧のすぐ後には再び正圧が現れ、ゆるやかに減衰する。これらの差が生ずる原因は定性的には以下のように考えることができる。すなわち円錐気柱においては、円柱気柱と異なり、気柱の径が入口からの距離に比例して増加する。そのために円錐気柱内を伝搬する圧力波は、出口へ向かうときにも入口へ向かうときにも、常に進行方向とは逆向きの反射波を発生させる。例えば正の圧力波が入口(小さい径)から出口(大きい径)に向かって進むときには、常に到るところで入口方向に向かう負の反射圧力波が発生する。この圧力波が入口方向に進むとき、気柱の径が減少するので、出口方向に向かう負の圧力反射波が到るところで常に発生する。このように無数の反射波が重なった結果、円錐気柱入口の圧力 $p(t)$ は図9に示すように変化することになる。

円錐気柱の反射関数 $r(t)$ を計算して見ると、 $t = 0 \sim 17.5$ ms の範囲では g

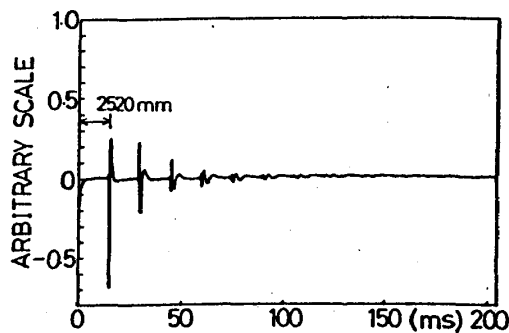
(t) と大差はないが、それ以降の減衰が $g(t)$ に比較して著しく速い。 $g(t)$ では、図9 bに示すように9回目の反射波までが認められるが、 $r(t)$ においては、3~4回目以降の反射波は減衰して殆ど認められない。 $r(t)$ においては、入口での波の反射の影響が少なくなるためである。(4)式によって円錐気柱の $r(t)$ を計算するとき、円錐気柱入口には、入口径と等しい径の無限に長い円柱気柱を接続することになる。この場合には図7に示した円柱気柱の場合と事情は異なり、入口に不連続な径の変化が存在する。したがって円錐気柱入口に向かって進んだ波の入口での反射を完全には取り除き得ないと思われる。



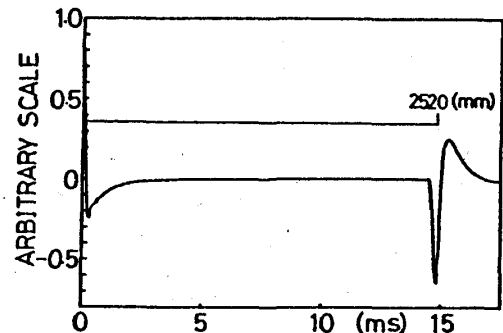
(a) 円錐気柱の円柱気柱による近似



(c) 測定値の一部



(b) 測定値



(d) 計算値の一部

図9 円錐気柱のインパルス応答

(2) バスーンのインパルス応答

図10には、1930年代に製作された Heckel 社のバスーンのインパルス応答を測定した結果を示してある^{8,9}。なお音孔はすべて閉じてあるので正しく吹奏すれば基本周波数が B_1^b

(58.3 Hz) の音を発生する。基本的には図9に示した円錐気柱のインパルス応答と似ているが、 $t = 0 \sim 15$ ms の間に多数の凹凸が見られる。バスーンの管体内部には多くの音孔や僅かな段差があるからである。またバスーンでは、頂角が僅かに異なる円錐気柱を接続し

て共鳴気柱を作っているとも聞いている。インパルス応答に沿って引いた直線の下側には1～29の数字があるが、これは音孔の番号と位置を示している。音孔の位置は、直線の上側に示した数字により、共鳴気柱の入口からどれ程の距離にあるかで示される。音孔23, 24, 25はバスーンに特徴的な深い音孔である。この辺に大きい振幅が見られる。他社製のバスーンではこの辺に3つの鋭いピークが見られるものもある。しかし音孔とインパルス応答の谷の位置は正確には必ずしも一致しない。

多数の音孔によって、共鳴気柱の中を伝わる波は極めて複雑な動きをする。体積流量のインパルスによって発生した正の音圧インパルスは $t = 0$ に現れ、右（気柱出口）方向に進むが、音孔に出会うと負の反射波を入口に送り返すと同時に気柱の右方向と音孔の方向に分かれて進む。音孔の出口で反射した圧力波は音孔入口に戻り、気柱入口に戻るもの、気柱の右方向に向かうもの、再び音孔に戻るものの3つに分かれる。共鳴気柱の右方向に向かった波が第2の音孔に出会うと、第1の音孔入口におけると同様なことが起こる。第2の音孔からの反射波が入口方向にもどるとき第1の音孔でまた同様に3方向に分かれて進む。時間の経過と共に気柱入口や気柱右端からの反射波が幾重にも重なってくる。

このような複雑なプロセスの結果が図10に示されている。そしてメーカーによって楽器に

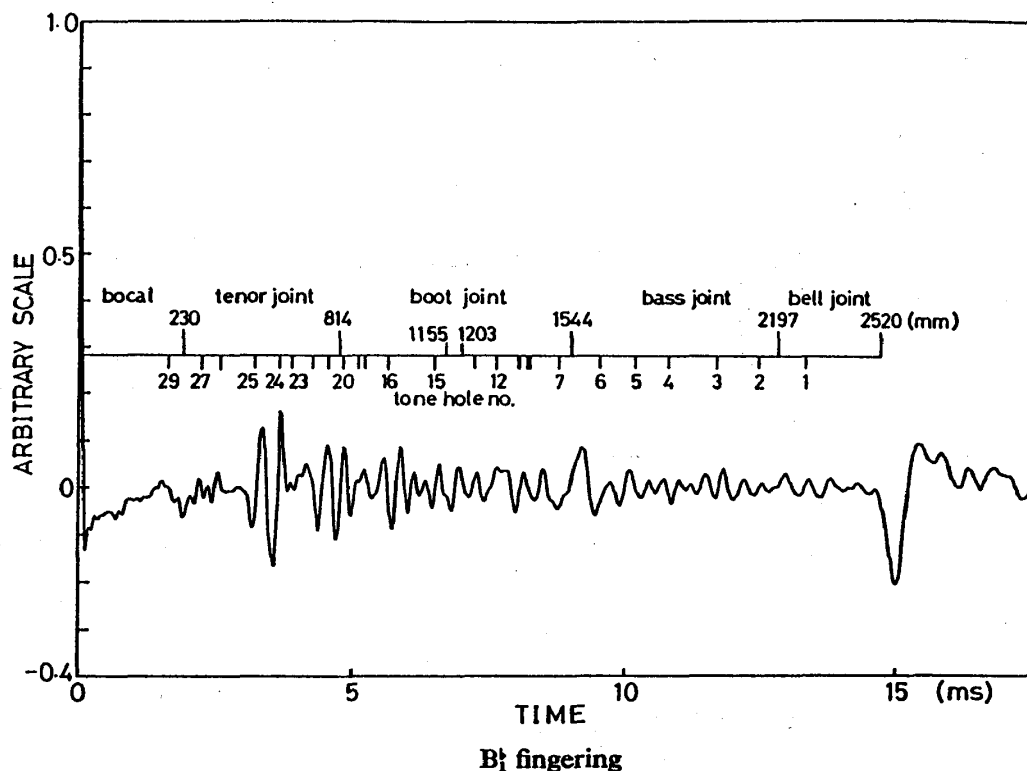


図10 バスーンのインパルス応答

相当な違いのあることや、同じメーカーの同じ形式の楽器でも微妙な違いを持つことが測定結果から知られた。A. H. Benade 教授やヤマハの竹内氏から聞いた話では、「楽器作りの職人は出来上がった楽器の気柱入口に唇を寄せてフッ、フッと吹いて見る」そうである。「共鳴気柱の上流側程重要だ」とウィーンフィルの演奏家から聞いたが、もっともなことである。入口はリードではほぼ閉じられているのでそこからの反射波が後へ後へと影響を及ぼすからである。

(3) クラリネットの反射関数

図11は、あるクラリネットの反射関数 $r(t)$ を Schumacher⁴ が計算した結果であるが、この場合には、 $G_3(196\text{ Hz})$ の音を発生するように、管端に近い幾つかの音孔は開かれた状態にある。Schumacher によって計算された同じ場合のインパルス応答 $g(t)$ は 196 Hz の音の8周期分の間変動して0にならないのに対して、この反射関数は 196 Hz の2周期程（約 10 ms ）以後は殆ど0になっている。この違いは気柱入口における音波の反射の有無によって生ずる。しかし複数の音孔の相互間のあるいは音孔と管端間の相互干渉は $r(t)$ にも現れる。 $t = 2.5 \sim 3.5\text{ ms}$ に見える2つの谷とそれに続く2つの山は管端にあるベルの影響と思われる。ベルの部分では気柱が滑らかにしかし急激に開いているので、波は、気柱入口に圧力波を送りながら、そのベルの斜面と管端の間で行きつ戻りつ複雑な動きをする。

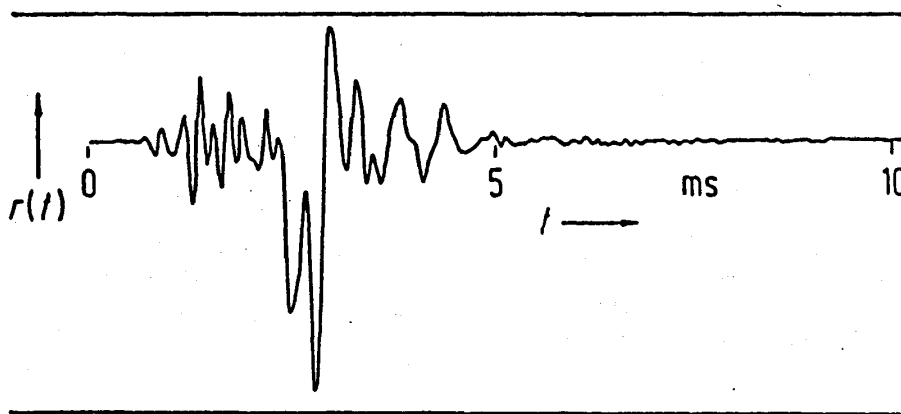


図11 Schumacher⁴ の計算によるクラリネット ($G_3: 196\text{ Hz}$ 運指) の反射関数

4. クラリネットの気柱振動を計算する Schumacher の式⁴

クラリネットの発音機構は、Schumacher による下記の(5)～(9)式によって一応記述できる。

$$\ddot{y} + g_r \dot{y} + \omega_0^2 y = (p - P_0) / \mu \quad (5)$$

y はリードが開く方向を正としたリードの変位を表す。左辺はリードの性質を2階の式で近似したものであり、 g_r はリードの減衰定数、 ω_0 はリードの共振周波数である。リードにかかる力は口の中の一定圧力 P_0 とマウスピース内の圧力 p の差で表される。なお、 μ はリードの単位面積あたりの質量である。

$$M_e \dot{f} = P_0 - p - \frac{f^{3/2} \operatorname{sgn}(f)}{A^{3/2} \xi^2} \quad (6)$$

この式はリード部分を通る空気に関する運動方程式である。リード開口は、リードの幅を w ($= 1.4 \text{ mm}$) とし、 $w \times \xi$ の長方形のスリットと考えている。 M_e はこのスリットを通る空気の実効質量で、下の(8)式から計算する。右辺の最後の項はこのスリットを通る空気の摩擦を表し、 A は定数である。

$$p = p_{\text{inc}} + Z_0 f - Z_0 S_r \dot{y} \quad (7)$$

この式は、マウスピース内圧力 p に関する式である。右辺第1項はある時刻からみて過去の p や f の影響を表し、下の(9)式にあるたたみ込み積分で計算される。右辺第2項は現在の f によって発生する圧力を表す。第3項はリードの動きがつくり出す流れによって発生する圧力である。また、 S_r はリードの実効面積である。

$$M_e = (\rho / 2\pi w) (\sqrt{r} + 2\sqrt{r} \ln 2r) \quad (8)$$

ここで、 ρ は空気の密度、 $r = w / \xi$ である。

$$p_{\text{inc}} = \int_0^\infty r(t') [Z_0 f(t-t') + p(t-t')] dt' \quad (9)$$

図12は(5)、(6)、(7)式の数値解すなわち振動が定常に達した後の $p(t)$ 、 $f(t)$ 、 $y(t)$ 波形を示すが、そのとき、 $P_0 = 3 \text{ kPa}$ 、リードの静止時の開口 $H = 0.4 \text{ mm}$ 、 $Z_0 = 2.51 \times 10^6 \text{ Pa s/m}^3$ とした。また Schumacher の論文⁴にある以下の数値を用いた。 $g_r = 3000 \text{ s}^{-1}$ 、 $\omega_0 = 23500 \sim 12500 \text{ s}^{-1}$ 、 $\mu =$

0.0231 kg/m^2 、 $A=0.0797 \text{ MKS単位}$ 、 $S_r=1.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。さらに $r(t)$ は、クラリネットに音孔がないものと仮定して計算した。そのときの $r(t)$ は図12(d)に示すようになる。これは実際のクラリネットの内径寸法の精密な測定結果から計算したものであるが、実験結果と詳しく照合するには、もう少し改良が必要である。

図13は、図12 a、b、cから得た $f-p$ 、 $y-f$ 、 $y-p$ の関係を示す。図13の $f-p$ 曲線と図4の差に注目されたい。

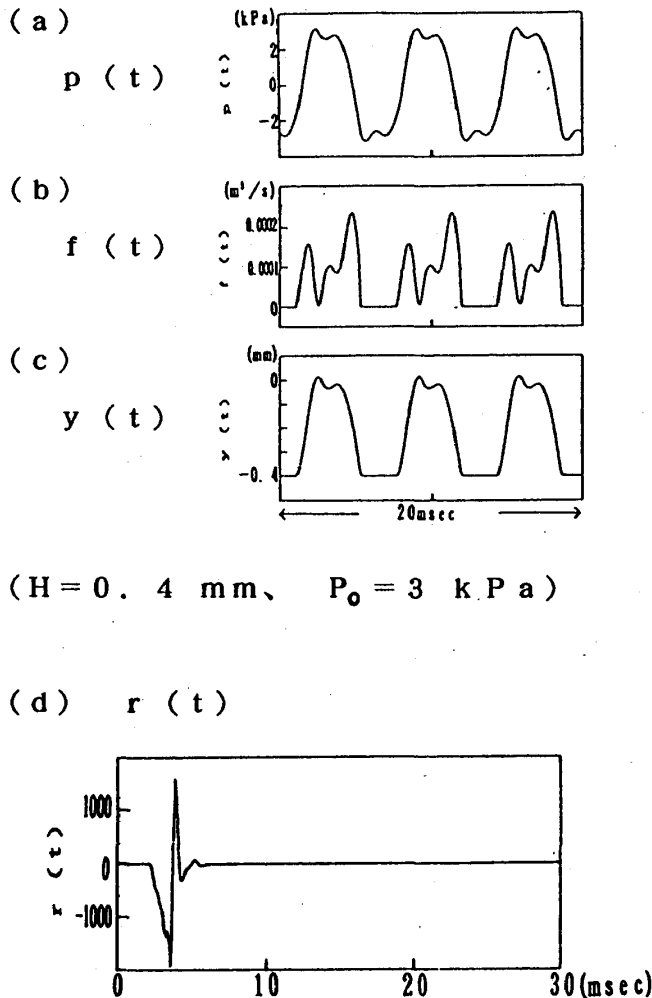


図12 クラリネットのD₃音波形と
反射関数

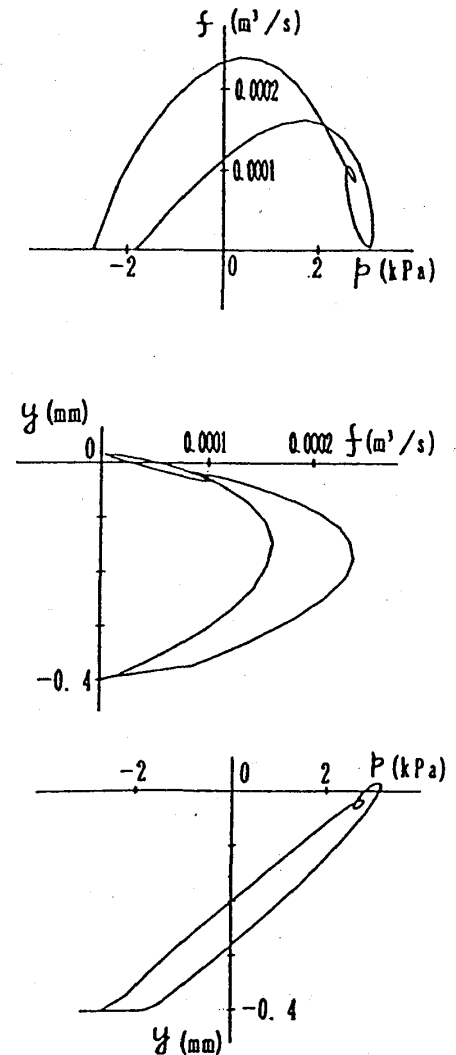


図13 クラリネットのD₃音の $f-p$ 、
 $y-f$ 、 $p-y$ の関係

5. 木管楽器の人工吹鳴

木管楽器が音を発生しているとき、 $p(t)$ 、 $y(t)$ 、 $f(t)$ はどのように変化しているのか？ このような測定データは、以前には報告されていなかった。本節には我々がこれ

らを測定した結果を示す。人間が吹奏すると安定した吹奏条件を長時間持続することが難しいので、人工吹鳴の装置を作って測定した。図14は人工の口の一例である。シリコンゴムで人間の唇に似た感じの人工の唇を作りその間にリードあるいはマウスピースをはさんで、はさみ込む深さや唇の締め付け具合を調節し（今後これを lip-adjustment と呼ぶ）、人工の口の中の圧力 P_0 を調節すると、楽器は発音する。lip-adjustment を固定して、減圧装置を手で操作して、 P_0 を0から、リードがつぶれて音が出なくなるまでゆっくり次第に上昇させ、それから下降させた。これを lip-adjustment を変えて繰り返した。このとき、 $p(t)$ は、マウスピースあるいはバスーンリードに開けた穴の中にプローブマイクロフォンの先端を入れて測定した。オーボエのリードは小さすぎて $p(t)$ の測定は不可能であった。 $y(t)$ はフォトダイオードを用いて測定した。クラリネットやオーボエの場合には、ベル外側から平行光を入射し、リード開口を通過してくる光量を観測した。バスーンの場合にはリードの横から平行光をあて、リードの陰をフォトダイオードで受けて $y(t)$ を観測した。 $P(t)$ はプローブマイクロフォンあるいは半導体圧力計で測定した。 $f(t)$ は直接測定が困難なので、熱線風速計で空気の風速 $v(t)$ を測定した。そのとき熱線風速計プローブの先端は、人工の口の方から、リード開口にできるだけ近づく位置に置いた。プローブを楽器の内部例えばマウスピース内部に置くと、その位置での粒子速度を検出してしまい、目的を達成できなかった。

5. 1 クラリネット

クラリネットの音孔をすべて閉じて人工吹鳴の実験を行った。従って、本来であれば、クラリネットの発振音の基本周波数は平均律音階の D_3 (147 Hz) に近い周波数を持つ筈である。ところが事情は極めて複雑である。lip-adjustment を適切に調節して固定し、 P_0 を次第に増加させまた減少させると、 P_0 の変化に伴って $p(t)$ 、 $y(t)$ 、 $f(t)$ の振動波形は複雑に変化した。

その一例を図15に示す。このような図を transition diagram と呼ぶことにしておく。 P_0 を0から上昇させて行くと $P_0 = 3.8 \text{ kPa}$ ($=P_s$) でクラリネットは突然発音した。そのときの音の基本周波数は、平均律音階の $C_6^\#$ (1109 Hz) に近い。その後 P_0 の増加に伴って音の基本周波数は僅かずつ連続的に変化した、やはり $C_6^\#$ に近い。 $C_6^\#$ で示した枠に対応する $3.8 < P_0 < 8.2 \text{ kPa}$ の範囲では、 P_0 の変化に伴って、発生音の周波数および $p(t)$ 、 $v(t)$ 、 $\xi(t)$ の波形は連続的に可逆的に変化した、突然大きく変化することはなかった。 D_3 、 D_3H 、 E_6 、 $C_6^\#L$ 等の他の枠で囲まれた範囲でも同様に、発生音の周波数や波形は連続的に可逆的に変化した。 $P_0 = 8.2 \text{ kPa}$ になると、突然 D_3 の

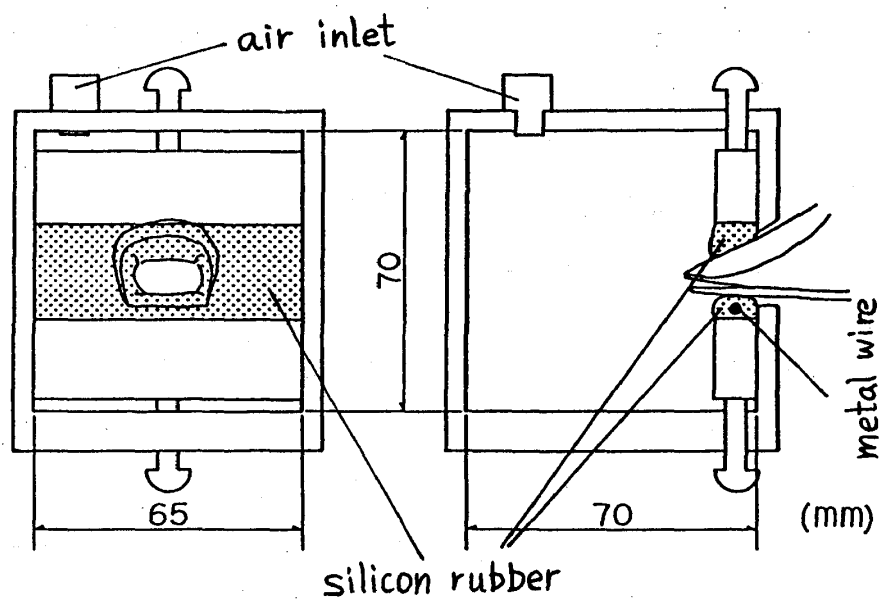


図14 人工の口の一例

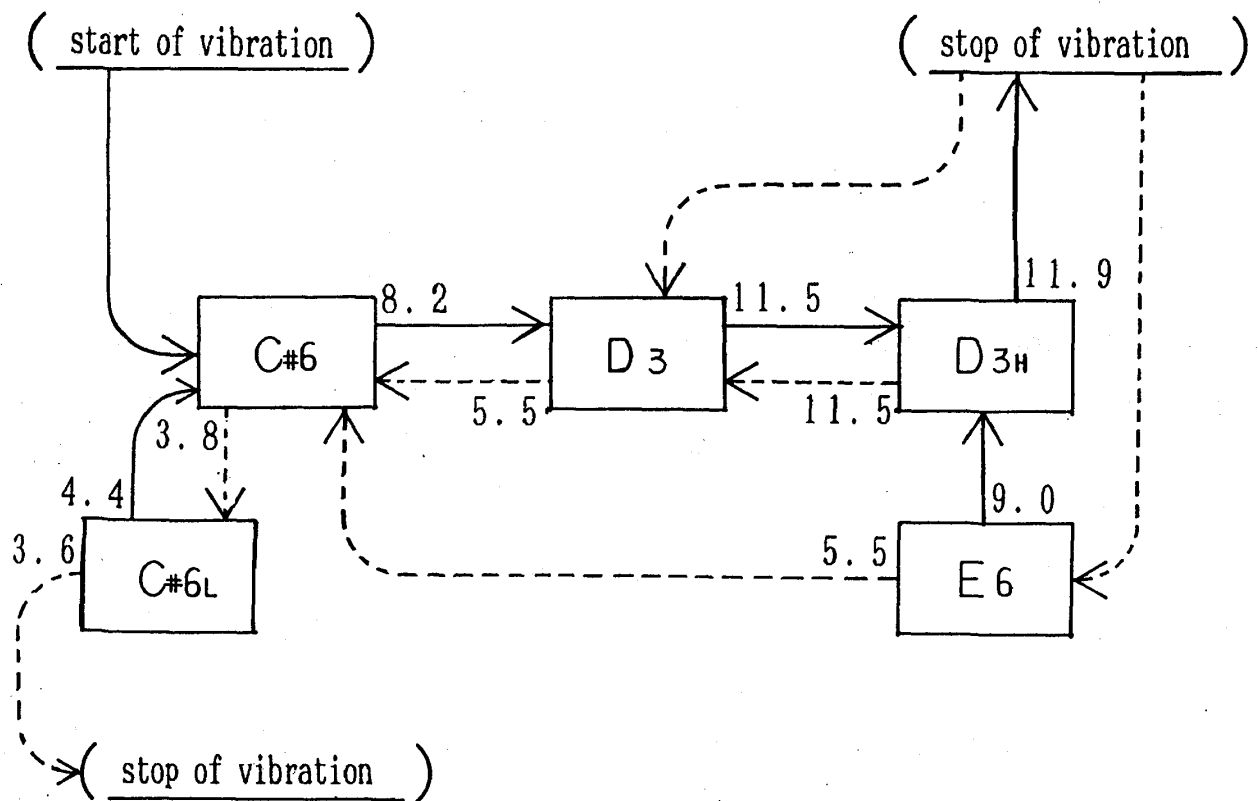


図15 クラリネットの transition diagram の一例。実線は P_0 上昇時の、点線は P_0 下降時の transition を示す。数値は transition が発生する P_0 を kPa 単位で表す。

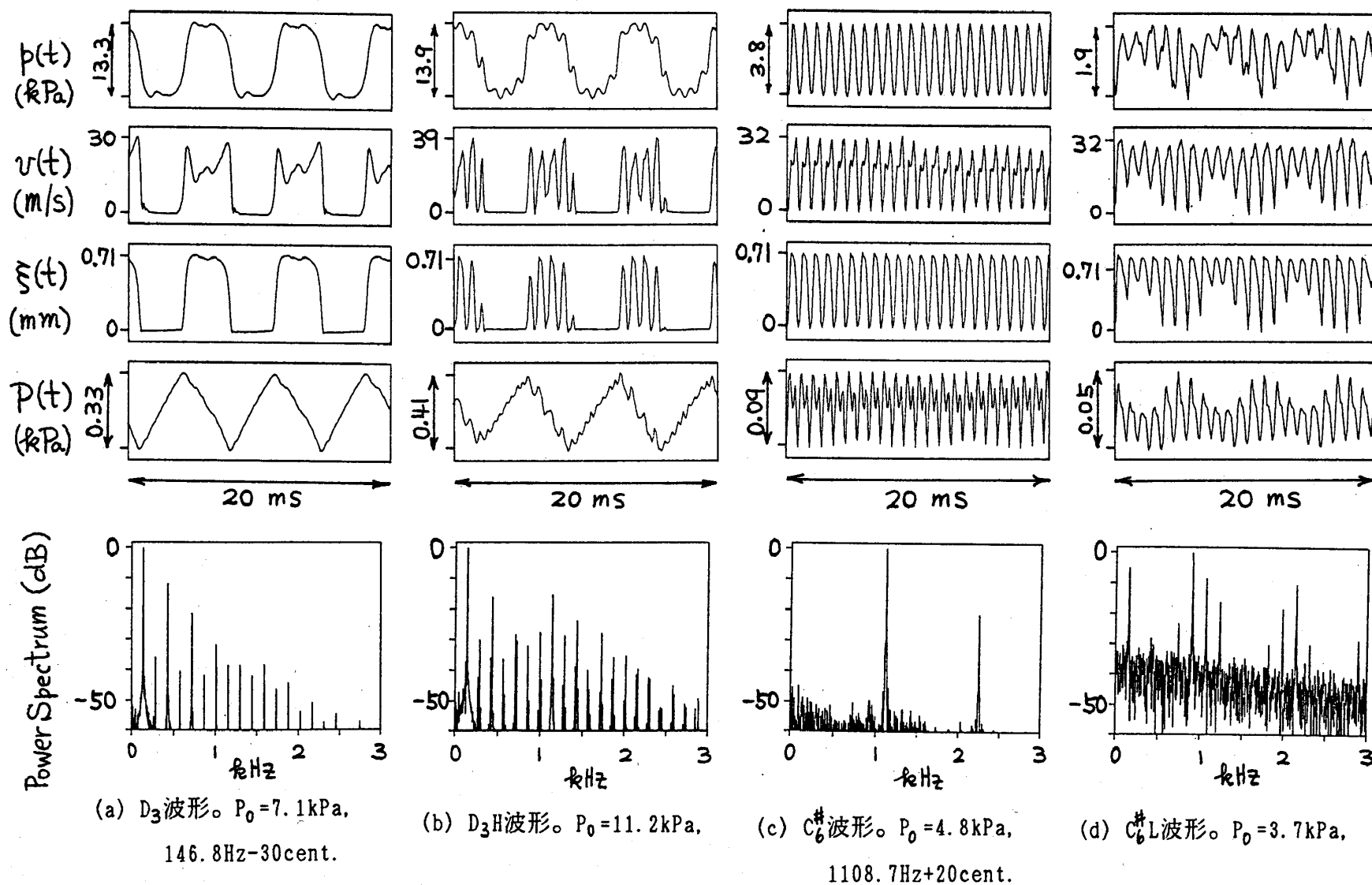


図16 クラリネットの transition diagram (図15) に示した各振動状態の波形。E6波形は $C_6^\#$ 波形に比較的
近いので省略した。静止時のリード開口 $H=0.71\text{ mm}$ 。(a)、(c)については吹鳴されるクラリネットの横の
チューナーで測定した周波数を付記してある。cent という単位については文末の註を参照。

音が聞こえた。上に述べたように、 D_3 枠内つまり $5.5 < P_0 < 11.5 \text{ kPa}$ の範囲では、 P_0 の変化によって発生音の周波数や波形は連続的に可逆的に変化した。この間 P_0 の上昇は D_3 音の近くで発振音を増加させた。 $P_0 = 11.5 \text{ kPa}$ になると、 C_6^\sharp と D_3 の音が混ざった音がさらに低い周波数で変調されたような音が聞こえた。この状態を D_3H と名付けておく。 $P_0 = 11.9 \text{ kPa}$ ($= P_c$) になると、リードがマウスピースに密着して発振が止まった。ここから P_0 を下げると、(多分 P_0 を下降させる速さによって)、 D_3 または E_6 (1319 Hz) の音が発生した。 E_6 から P_0 を上げると D_3H の状態が再現され、下げると C_6^\sharp の音が再び聞こえた。 $P_0 = 3.8 \text{ kPa}$ になると、 $C_6^\sharp L$ と名付けた状態が現れた。この状態では、いろいろの高さの音に雑音が重なったように聞こえた。 $P_0 = 3.6 \text{ kPa}$ で振動は止んだ。

上記の様子をまとめて、他の楽器、バスーンやオーボエやソプラノサキソフオンでも成り立つ規則として以下に述べる。

(1) 木管楽器は $P_S < P_0 < P_c$ の範囲で発振する。 $P_0 > P_c$ ではリードは完全に閉じる。(2) P_S および P_c の値は楽器やリードによって変化するのみならず、lip-adjustment によっても変化する。(3) 同一楽器を同じリードで吹鳴しても、lip-adjustment によって、励振される $p(t)$ 波形の種類が異なる。(クラリネットの lip-adjustment を変えると図15とは全く別のいろいろな transition diagram が得られ、その中に含まれる音の種類も異なる。)(4) P_0 のある範囲の中では、 P_0 の変化に伴って発生音の基本周波数や $p(t)$ 波形は連続的に可逆的に変化する。(例えばクラリネットが図15で D_3 の音を発生するとき、 P_0 を $5.5 \sim 11.5 \text{ kPa}$ の間で変えると、発生音の基本周波数や $p(t)$ 波形は連続

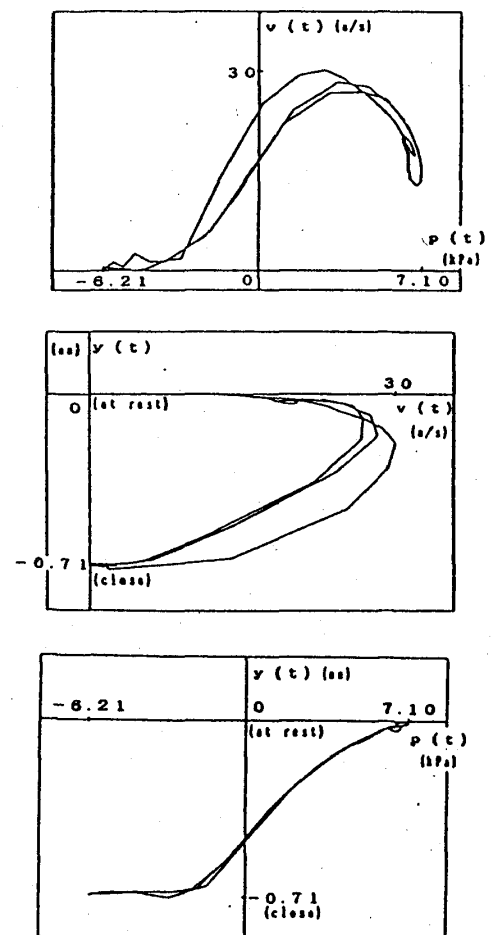


図17 クラリネットの D_3 状態における $v-p$ 、 $y-v$ 、 $y-p$ の関係

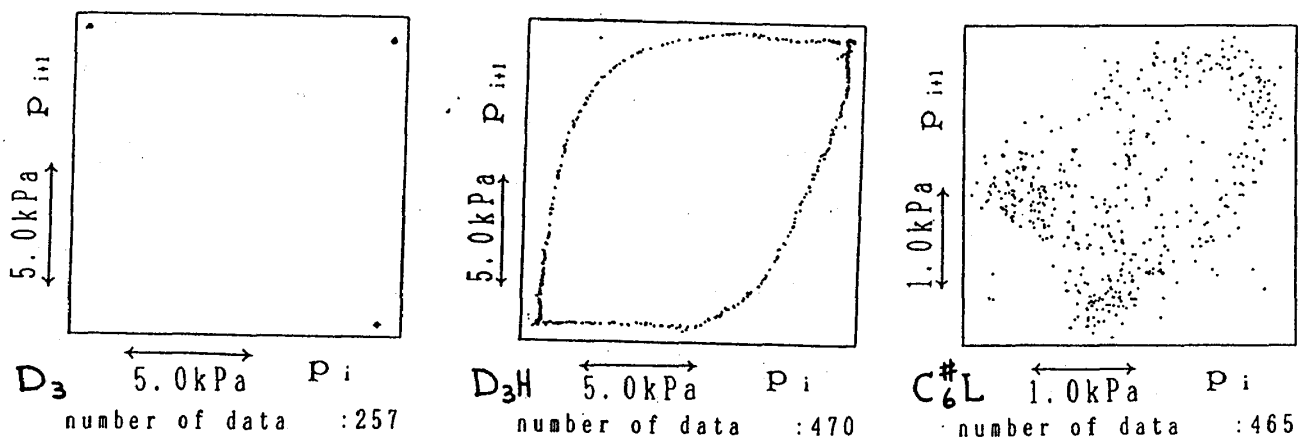


図18 クラリネット $p(t)$ 波形の first return map

的に可逆的に変化する。) (5) $P_0 = P_t$ において $p(t)$ 波形は突然不可逆的に変化する。これを transition と呼ぶ。 P_t の値は P_0 を上昇させるときと下降させるときでは一般的には異なる。一度 transition が発生すると P_0 を少しくらいもどしても transition はそのまま進行する。(6) transition は2つの安定領域の間で、場合によっては、一方向にしか進行しない。このために P_0 の上昇下降に伴って発生する振動状態にはヒステリシスがある。

D_3 、 D_3H 、 $C_6^\#$ 、 $C_6^\#L$ の状態における $p(t)$ 、 $v(t)$ 、 $\xi(t)$ 、 $P(t)$ 波形および $p(t)$ のパワースペクトルを図16 a、b、c、dに示す。(プローブマイクロフォンの周波数特性は補償した。) 図17は図16 aについて $v-p$ 、 $y-v$ 、 $y-p$ の関係を示すが、図13とよい一致を示す。図18は D_3 、 D_3H 、 $C_6^\#L$ 状態の $p(t)$ の first return map である。 $C_6^\#L$ の first return map からは、fractal dimension = 1.4 が計算されるから、 $C_6^\#L$ の状態は chaotic regime にあると思われる。

5. 2 バスーン¹⁰

バスーンの音孔をすべて閉じて人工吹鳴したときの transition diagram の一例を図19に示す。この図の見方は図14の場合と同様である。長方形の枠の中には発振状態の記号を記してある。これらの枠を結ぶ実線は P_0 を上昇させるときの、点線は P_0 を下降させるときの transition を示す。これらの線の傍らにある数字は P_t である。枠の中の B1 はバスーンの最低音 B_1^b (58.3 Hz) に近い基本周波数の音を意味し、-1、-2、-3... 等は同じ周波数の音でも異なる $p(t)$ 波形を持つものを区別するために図19で左の方から付けた

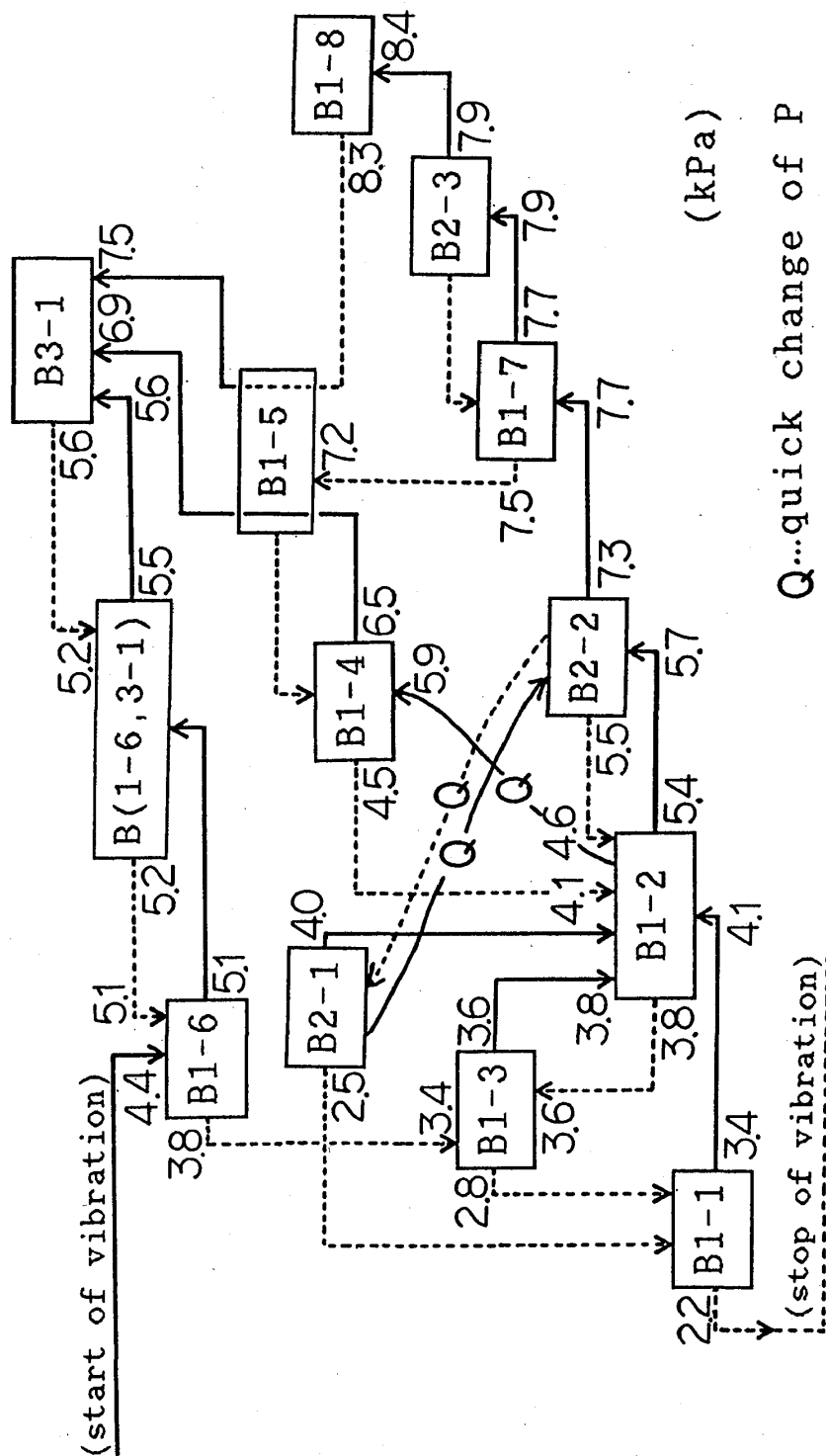


図19 バースンの transition diagram の一例

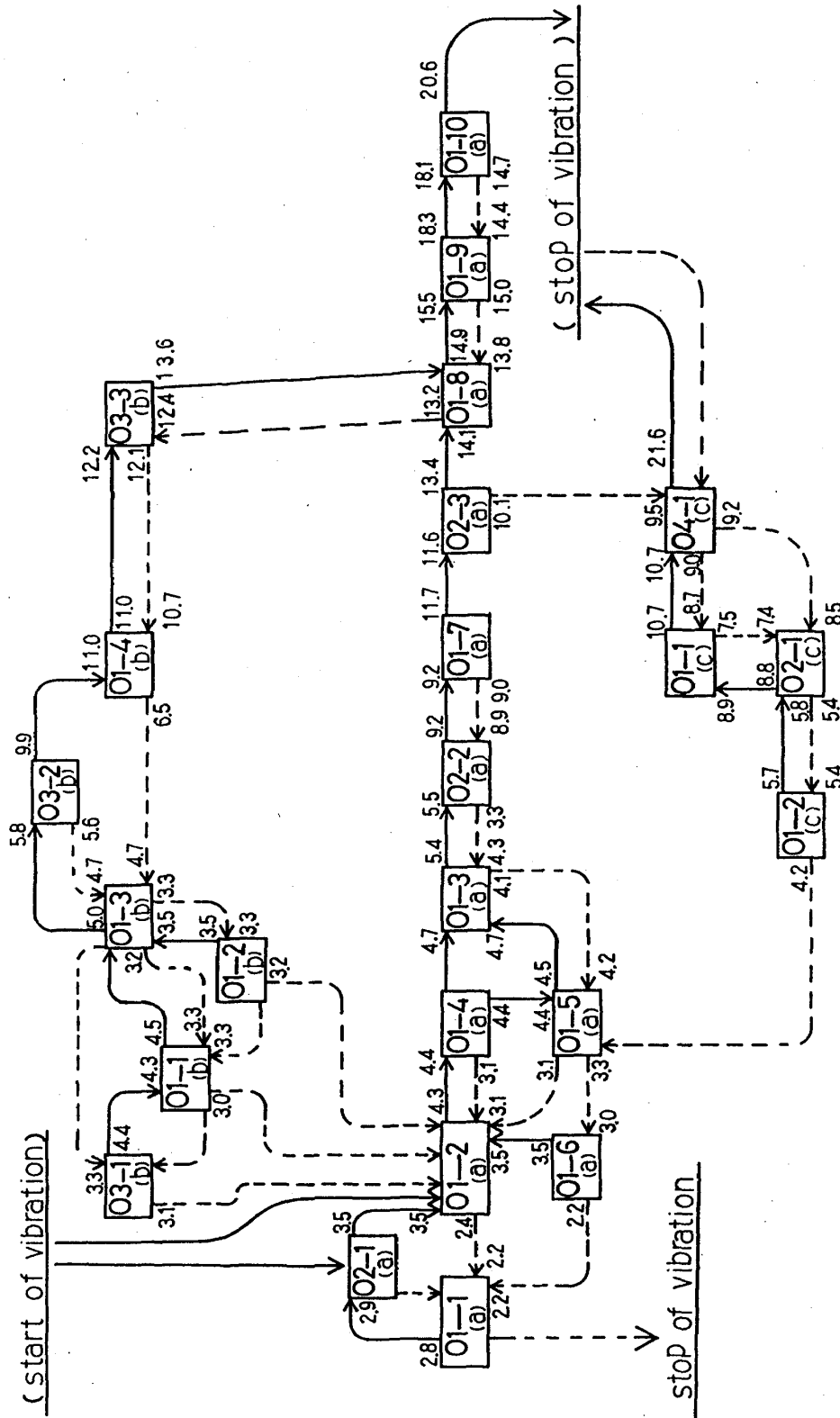


図20 オーボエの transition diagram の一例

番号である。音孔をすべて閉じた状態で演奏家が吹奏する定常音は、バースンの transition diagram における $B_1 - 1$ 状態の音である。これは耳で聴けばすぐわかる。 B_2 は B_1^b の 2 倍音 ($B_2^b : 116.5 \text{ Hz}$) に近い基本周波数の音を意味する。同様に B_3 は B_1^b の 3 倍音 ($F_3 : 174.6 \text{ Hz}$) に近い周波数の音である。 $B(1-6, 3-1)$ は、 $B_1 - 6$ と $B_3 - 1$ の間で発生するうなりに似た音である。また Q を付した transition の線は P_0 を速やかに変化させるときに生ずる transition を示す。クラリネットの項で示した transition の規則がバースンの場合にもあてはまる。

5. 3 オーボエ

オーボエの音孔をすべて閉じて人工吹鳴したときの transition diagram の一例を図 20 に示す。この図の見方はクラリネットやバースンの場合と同様である。オーボエの音孔をすべて閉じて演奏家が吹奏する定常音は B_3^b (233.1 Hz) である。音楽的に満足出来るのは $O_1 - 1$ 状態の音であることは、聴いてみればすぐわかる。また例えば $O_1 - 5$ は、基本周波数が B_3^b の音であるが、5 番目に見つかる $y(t)$ 波形である。 O_2 の音の基本周波数は B_3^b の倍音 ($B_4^b : 466.2 \text{ Hz}$) に近い。 O_3 は B_3^b の 3 倍音 ($F_5 : 698.5 \text{ Hz}$) に近い基本周波数を持つ。

6. 考察

バースンにしてもオーボエにしても、1 例として挙げた複雑な transition diagram は、同じリードを用い、lip-adjustment をその通りに調節すれば何度でも繰り返し得られた。しかし、リードを変え、異なる lip-adjustment のもとでは異なる transition diagram が得られた。4 節に述べた Schumacher の式はクラリネットに関するものであるが、バースンやオーボエについても同様な式が存在する筈である。そしてその安定解が、例えばオーボエにおいて見られた極めて多数の $y(t)$ 波形を与える筈である。しかしその方程式はまだ知られていない。Schumacher のクラリネットに関する式にしても、クラリネットの transition diagram のすべてを与えないので、まだ不備である。クラリネット、バースン、オーボエの振舞を完全に記述する非線形方程式が明確になったとき、木管楽器の発音機構は明かになる。

人工吹鳴の実験において lip-adjustment を固定して P_0 を変化させるとき、人工の唇とリードの接触位置が相対的にずれるために transition が発生するのではないかという疑問がある。しかし transition に際しては、目に見える程の唇のずれは観測されなかった。また鉛筆の先端で目に見える程度故意にリードを動かしてみても transition は発生しなかった。いず

れにしても lip-adjustment と P_0 によって多くの種類の振動波形や振動周波数が発生することは確実である。

それにしても、例えばオーボエが示す多様な波形の中から望ましい一つを選び出す演奏者の修練は驚嘆に値する。それはタンギングと呼ばれる演奏技法によるところが大であるらしい。

木管楽器を演奏するとき、クラリネットであれば D_3 、バスーンであれば $B1-1$ 、オーボエであれば $O1-1$ の状態における $p(t)$ 波形を吹奏できれば、持続音としては充分である。その他の音は初心者がしばしば誤って発する音であり、また相当に熟達した演奏家でも時として誤って発する音である。これらの音が出ないように楽器を改良出来たとしたら、演奏は容易になる筈である。しかしそのとき木管楽器は果して現在よりも優れた性能を持ち得るであろうか。木管楽器のレスポンス等、過渡状態における振舞いについては、現在のところ、殆ど何も知られていない。クラリネットの D_3 、バスーンの $B1-1$ 、オーボエの $O1-1$ 以外の音は果して邪魔ものであるだろうか。それらの存在を許す構造故にレスポンスのよい木管楽器が作られ、あるいは演奏において多彩な表現が可能になるのかも知れない¹¹。

これまでの楽器の物理学の研究は多くの知見を与えはしたが、電子楽器を除けば、従来の楽器の構造を根底から変えてしまう程には到らなかったと思う。一つには我々の耳が現存の楽器の音をよしとするように馴らされてしまっていることにもよるが、長い年月をかけて改良が加えられてきた楽器の完成度の高さにもよるのであろう。電子楽器の発達は、合奏と言う音楽することの、素人は素人なりの、最高の楽しみを我々から奪い去ってしまうかも知れない。

7. まとめ

木管楽器について、我々の研究室で行ってきた実験や測定について概要を述べた。

共鳴気柱のインパルス応答や反射関数の測定は、楽器の検査等に実用に供しうる有効な新しい手段である。インパルス応答や反射関数の解釈は、本文には示さなかった共鳴気柱の簡単なモデルについての計算結果¹²にもとづいて述べた。

吹鳴条件によって木管楽器が示す極めて複雑な振舞いについてのデータは得られた。それをどう理解するかは今後の問題である。楽器の振舞いを物理学の立場から理解することと楽器の製作技術とは、多くの接点を持つには違いないが、本来異質なものであろう。

楽器は、演奏者の熟練によってはじめて楽器となる。

謝辞 研究を進めるにあたって多くの方々からご教示あるいはご援助を頂いた。九州芸術工科大学安藤由典学長、京都大学池田研介教授、筑波大学の小川泰教授や平田隆幸助手、ロゲルグ

研究所の近藤正夫先生、ヤマハ株式会社の竹内明彦氏、電気通信大学中村勲教授、東京大学南雲仁一名誉教授に厚く感謝する。最後に物性研究に投稿の機会を与えて下さった池田研介教授にお礼を申し上げる。

参考文献と註

1. 安藤 由典、"楽器の音色を探る、" 中公新書 No. 526 (1978).
2. A. H. Benade, "The physics of wood winds," Sci. Am., 203(4), 145-154 (Oct. 1960).
3. M. E. McIntyre, R. T. Schumacher and J. Woodhouse, "On the oscillation of musical instruments," J. Acoust. Soc. Am. 74, 1325-1345 (1983).
4. R. T. Schumacher, "Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet," Acustica 48, 71-85 (1981).
5. G. R. Plitnik and W. J. Strong, "Numerical method for calculating input impedances of the oboe," J. acoust. Soc. Am. 65, 816-825 (1979).
6. R. Causse, J. Kergomard and X. Lurton, "Input impedance of brass musical instruments — Comparison between experiment and numerical models," J. Acoust. Soc. Am. 75, 241-254 (1984).
7. H. Levin and J. Schwinger, "On the radiation of sound from an unflanged circular pipe," Phys. Rev. 73, 383-406 (1948).
8. M. Ishibashi and T. Idogawa, "Input impulse response of the bassoon," J. Acoust. Soc. Jpn. (E). 8, 139-144 (1987).
9. 石橋 雅裕、井戸川 徹、"バスーン管体のインパルス応答の測定、" 日本音響学会音楽音響研究会資料 MA85-24 (1986).
10. M. Shimizu, T. Naoi and T. Idogawa, "Vibrations of the reed and the air column in the bassoon," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) 10 (1989) 269.
11. 池田 研介、"光カオスは応用可能か?、" 光学 10(1988)508.
12. 小室 孝治、井戸川 徹、"木管楽器管体気柱のインパルス応答と反射関数、" 日本音響学会音楽音響研究会資料 MA88-10 (1988).

(註) 2つの音の音程 (interval) は cent という単位で表される。2つの音の周波数を f_1 、 f_2 とするとき、 $f_1 / f_2 = 2^{n/1200}$ ならば、これら2音の音程は n cent であると言う。平均律音階の1半音は100 cent であり、1オクターブは12半音つまり1200 cent である。